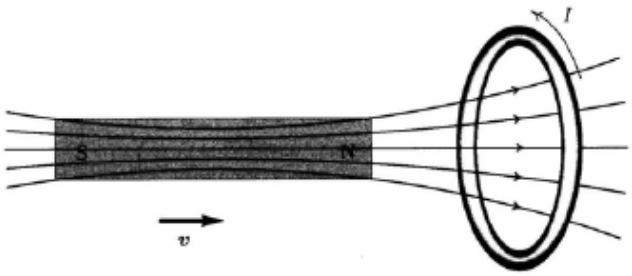
VII. Indução magnética. Equações de Maxwell

7.1 Indução magnética A lei de Faraday

Em 1831, Michael Faraday realizou uma experiência notável, em que observou uma corrente numa espira, que não era ligada a bateria nenhuma mas estava em movimento na vizinhança de um íman permanente. A conclusão que foi tirada por Faraday é que há uma corrente no circuito desde que exista uma variação do campo magnético que atravessa a espira. A corrente é induzida, ou gerada por uma FEM induzida, pela variação do campo magnético. Numa segunda experiência, ele usou uma bobina em vez do íman permanente. A bobina e a espira estavam em repouso, mas a corrente na bobina variou. Em resultado, o galvanómetro detectou uma corrente na espira. Assim foi estabelecida a lei de Faraday, que pode ser enunciada em palavras seguintes:



Um íman ao aproximar-se de uma espira induz uma força electromotriz ao longo da espira.

A força electromotriz induzida numa espira é proporcional a taxa temporal de variação do fluxo magnético através da espira.

Essa lei pode ser escrita como

$$\mathrm{E} = -\left(\frac{1}{c}\right)\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \qquad (148)$$

onde o fluxo magnético

$$\Phi_m = \int \vec{B} d\vec{S} \qquad (149)$$

através duma superfície delimitada pela espira

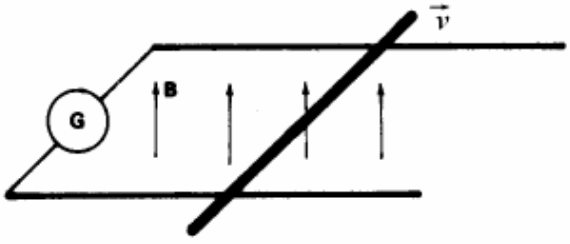
Na Eq.(148), o factor $\left(\frac{1}{c}\right)$ só aparece no sistema CGS (no S.I. não existe). Mencionemos que a unidade do fluxo magnético no SI chama-se 1 Weber (Wb) enquanto no CGS não tem nome especial.

Para uma bobina constituída por N espiras, a força electromotriz é N vezes maior:

$$\mathrm{E} = -N\left(\frac{1}{c}\right)\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}$$

Exemplos

1) A barra condutora mostrada na figura está em movimento com uma velocidade de constante (v), deslizando sobre dois tolhas condutores. O campo magnético é uniforme e estacionário (B).



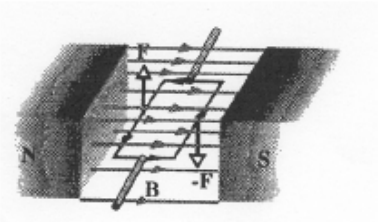
O fluxo através do circuito aumenta, se escolhermos a normal ao plano do circuito para cima:

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} = BLv \qquad (150)$$

onde L é o comprimento da barra.

Então, a FEM induzida é dada pela Eq.(150) (no S.I.). Qual é o sentido da corrente induzida? Com a normal para cima e o fluxo a aumentar, o sentido é o dos ponteiros de relógio (o sinal "-" na Eq.(148)). Provavelmente é mais fácil determinar o sentido da corrente induzida pela **lei de Lenz**:
A polaridade da FEM induzida é tal que ela tende a provocar uma corrente que vai produzir um fluxo magnético que se opõe à variação do fluxo magnético do campo externo através do circuito fechado.
Então, no exemplo que estamos a considerar, o fluxo do campo produzido pela corrente induzida tem que ser negativo, ou seja, o campo secundário tem de ter direcção para baixo (dentro do circuito). Para isso, o sentido da corrente tem que ser tal como foi indicado.

2) Uma espira a rodar num campo magnético uniforme
O fluxo através da espira varia em função do ângulo que a normal à espira faz com o vector de campo magnético.



$$\Phi_m = BS\cos\phi \qquad (151)$$

onde S é área da espira. O ângulo $\phi = \omega t + \phi_o$, (ϕ_o é um constante), então, das Eqs.(143) e (151) temos:

$$\mathrm{E} = \omega BS\sin(\omega t + \phi_o) \quad \text{(S.I.)} \qquad (152)$$

Então, a espira funciona como a gerador de corrente sinusoidal.

A energia do campo magnético
Conhecendo o fenómeno de indução magnética, podemos considerar a questão de energia associada a um campo magnético. A primeira coisa que deve ser notada é que o campo magnético não é potencial, ou seja, não realiza trabalho sobre partículas carregadas. Por isso, a sua energia não pode ser associada ao trabalho realizado. No entanto, quando o campo magnético varia com tempo, cria um campo eléctrico. De acordo com a Eq.(148) e a definição da FEM, podemos escrever:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = -\left(\frac{1}{c}\right)\frac{\partial\Phi_m}{\partial t} \qquad (148a)$$

(Esta é a forma da lei de Faraday proposta por Maxwell).
Utilizando o teorema de Stokes temos:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (153)$$

A Eq.(153) determina o campo eléctrico induzido. Este campo, durante um intervalo de tempo Δt, realiza um trabalho sobre a corrente $\vec{j}$ (que é responsável pela existência do campo magnético). O trabalho é igual à energia dissipada na passagem da corrente, dada pela lei de Joule-Lenz (Eq.(122),

$$\Delta R = \Delta t\int(\vec{j}\vec{E})dV \ .$$

Da Eq.(143),

$$\vec{j} = \frac{1}{4\pi K_m}\mathrm{rot}\vec{B}$$

Assim, podemos escrever:

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{1}{4\pi K_m}\int \mathrm{rot}\vec{B}\cdot\vec{E}dV \ .$$

Notemos que

$$\int \mathrm{rot}\vec{B}\cdot\vec{E}dV \equiv \int \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})dV$$
$$= \int \underbrace{\mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{B})dV}_{\downarrow} - \int \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E})dV\,.$$
$$\oint(\vec{E}\cdot\vec{B})d\vec{S} = 0$$

na superfície remota

Então,

$$\int \mathrm{rot}\vec{B}\cdot\vec{E}dV = -\int \vec{B}\cdot\mathrm{rot}\vec{E}dV$$
$$= \left(\frac{1}{c}\right)\int \vec{B}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}dV = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}\right)\frac{\partial}{\partial t}\int B^2 dV$$

onde usamos a Eq.(153). O trabalho realizado por unidade do tempo é:

$$\lim\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\right)\frac{1}{8\pi K_m}\int B^2 dV\,.$$

Este trabalho só pode ser realizado a custa da energia do campo magnético, que é a fonte do campo eléctrico e é relacionado com a corrente. Assim, podemos associar ao campo magnético uma energia (por unidade de volume),

$$U_{\mathrm{M}} = \left(\frac{1}{c}\right)\frac{B^2}{8\pi K_m} = \begin{cases} \dfrac{B^2}{8\pi} & \text{(CGS)} \\ \dfrac{B^2}{2\mu_0} & \text{(SI)} \end{cases} \qquad (154)$$

Apesar do facto que a fórmula para a densidade de energia do campo magnético tem muita semelhança com a respectiva fórmula para o campo eléctrico (74), o significado físico destas energias é diferente.

7.2 Auto-indutância e indutância mútua

Consideremos uma espira que pode estar ligada a bateria. Não há campo magnético externo. No instante em que a chave for fechada vai surgir corrente no circuito. Essa corrente vai produzir um campo magnético, enfim, um fluxo magnético, que varia. (antes de fechar a chave, foi igual a zero!) De acordo com a lei de Faraday, a variação de fluxo vai provocar uma FEM induzida, que vai se opor à FEM da bateria (de acordo com a lei de Lenz). Este fenómeno é conhecido como auto-indutância.
Devido à auto-indutância, a espira oferece alguma inércia à variação da corrente. A FEM auto-induzida é proporcional à taxa temporal de variação de corrente:

$$\mathrm{E}_{a.u.} = -\left(\frac{1}{c}\right)\frac{d\Phi_m}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \qquad (155)$$

onde L é uma constante de proporcionalidade, chamada indutância. A unidade S.I. da indutância é 1 Henry:

$$1H = 1\frac{V\cdot s}{A} = 1\Omega\cdot s\ .$$

Por exemplo, para um solenóide comprido com n espiras circulares de raio r por unidade de comprimento, não é difícil achar que a sua indutância é dada por

$$L = \begin{cases} 4\pi^2 r^2 \left(\frac{1}{c}\right)^2 nN & \text{(CGS)} \\ \pi r^2 \mu_0 nN & \text{(SI)} \end{cases} \tag{156}$$

onde N é o número total de espiras. Basta substituir na Eq.(155) $\Phi_m = NSB$ em que $S = \pi r^2$ e $B = K_m \cdot 4\pi nI$ é o campo magnético no interior do solenóide.

Um circuito que contém uma indutância (ou seja, uma espira ou normalmente uma bobina) chama-se circuito RL. Podemos calcular a variação temporal da intensidade de corrente neste circuito. Pela segunda lei de Kirchoff,

$$\mathrm{E} + \mathrm{E}_{a.u.} = RI$$

ou seja,

$$\mathrm{E} = L\frac{dI}{dt} + RI \tag{157}$$

Resolvendo esta equação, temos

$$I = \frac{\mathrm{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{RL}}}\right)$$

onde

$$\tau_{RL} = \frac{L}{R} \tag{158}$$

é constante de tempo do circuito RL. Então, como esperamos, a corrente aumenta gradualmente, devido ao fenómeno de auto-indutância.

Indução mútua.

Dois circuitos com correntes variáveis induzem correntes mutuamente, alem da auto-indução. A FEM induzida pelo circuito 1 sobre o circuito 2 é directamente proporcional à variação da corrente 1, e vice-versa. As FEM's totais induzidas em cada circuito, são:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_1 &= -M_{12}\frac{dI_2}{dt} - L_1\frac{dI_1}{dt} \\ \mathrm{E}_2 &= -M_{21}\frac{dI_1}{dt} - L_2\frac{dI_2}{dt}. \end{aligned} \tag{159}$$

Pode-se mostrar que $M_{12} = M_{21}$. Este parâmetro é chamado de indutância mútua.

O fenómeno de indutância mútua está na base de funcionamento do transformador. O transformador é formado por duas bobinas acopladas (ver figura na página 14), conhecidas como primária e secundária. Quando se aplica ao circuito primário uma FEM variável, produz-se uma FEM, também variável, no secundário. Normalmente, a bobina primária e a secundária estão enroladas em torno de um núcleo de ferro, com o objectivo de concentrar o fluxo magnético. Quando se aplica uma FEM variável E_1 à primária, com N_1 espiras, produz-se uma corrente neste circuito, que cria um campo magnético localizado dentro do núcleo de ferro. Se Φ_m for o fluxo magnético através de uma espira da bobina primária, o fluxo total através dela é $N_1\Phi_m$ e podemos escrever

$$\mathrm{E}_1 = -N_1 \cdot \left(\frac{1}{c}\right)\frac{d\Phi_m}{dt}.$$

Aproximadamente o mesmo fluxo passa pelas N_2 espiras da bobina secundária. Por isso, a FEM que aparece nela é

$$\mathrm{E}_2 = -N_2 \cdot \left(\frac{1}{c}\right)\frac{d\Phi_m}{dt}.$$

O quociente das duas FEMs é:

$$\frac{\mathrm{E}_2}{\mathrm{E}_1} = \frac{N_2}{N_1},$$

o que significa que a FEM que aparece no circuito secundário é maior ou menor do que a FEM aplicada à bobina primária dependendo do número de espiras. Quando $N_2 > N_1$ fala-se de transformador de aumento de tensão, caso contrário é um transformador de diminuição de tensão. O resultado acima apresentado é simplificado e não leva em consideração vários factores, como as perdas de fluxo e o efeito do circuito externo ligado à bobina secundária. De facto, nos temos desprezado o efeito da corrente no circuito secundário (I_2), ou seja, os dois termos com $\frac{dI_2}{dt}$ nas equações (159). A relação obtida implica que

$$M_{21} = \frac{N_2}{N_1} L_1,$$

o que é válido apenas na ausência de quaisquer perdas de fluxo entre as bobinas.